多角形ビリアード系の量子力学的性質

早大理工　　清水　寧　首藤　啓

§1　動機と問題設定

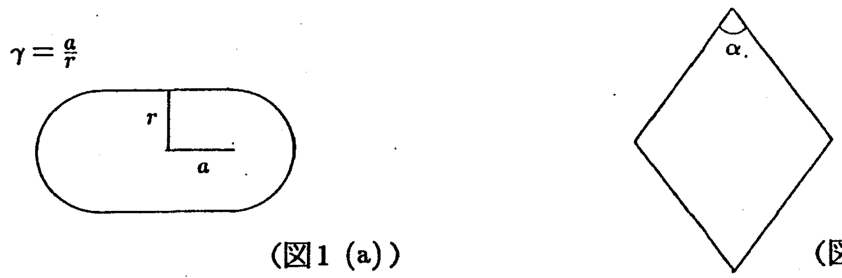
量子カオスの研究の1つの目的は、古典力学のカオスが対応する量子系の性質にどの程度またどのように反映するかを明確にすることである。しかし古典カオス系（非可積分系）と一口にいってもそこにはC系、K系、近可積分系、リアプノフ指数の大きい系、小さい系等、様々な観点に応じて多様なクラスが存在する。ここでは、このような非可積分系内でのクラスの違いが量子力学でどのようなかたちで現れるかを明らかにすることを目標とする。その一環として具体的には、古典カオスの特性量であるリアプノフ指数と、その量子系への反映という視点から、2種類のビリアード系を次なる問題設定の下で調べた。

（i）スタジアムビリアード系（図1 (a)）

リアプノフ指数の大小は系の量子力学的性質に影響するか？

（ii）多角形ビリアード系（菱形）（図1 (b)）

リアプノフ指数が零であっても、量子カオスの特徴的振舞いを見いだすことができるか？



（図1 (a)）　　（図1 (b)）

これらの系を選ぶ理由は、(i)(ii) が各々次のような古典力学的性質を有することによる。

（i）$\gamma > 0$ であればこの系はつねにK系であり、リアプノフ指数は $\gamma = 1$ で最大値をとる。[1]

（ii）α の値によらずこの系のリアプノフ指数は零である。[2]なお、

$$\alpha = \begin{cases} \text{（イ）（有理数）} \times \pi \\ \text{（ロ）（無理数）} \times \pi \end{cases}$$

に応じて系の軌道は各々

（イ）種数［g］1以上の multiply-handled sphere 上の流れ

（ロ）g=∞の multiply-handled sphere 上の流れ

になる。[3] α の値によってgは図2のようになる。（ロ）に関しては弱混合性をもつことが予想されている。[4]実際 Birkoff 座標でみると，100万回 iterate しても初期点は相空間全体にひろがっていかない。(図3)

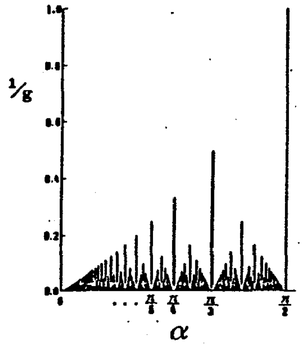


図2

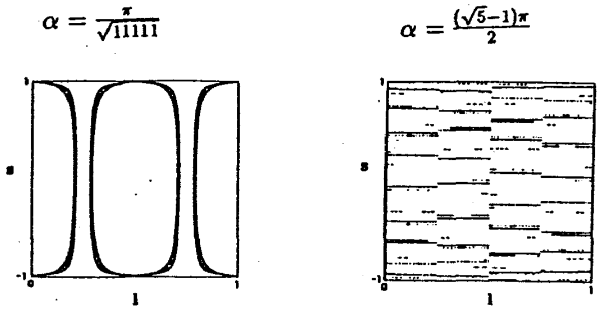


図3

§2 結果

(i) スタジアムビリアード系

$\overline{\Delta}_3(L)$ 統計量はγの値に応じて図4の様な振舞いを示す。エネルギーレベルの数は各々700,700,700,860であり、数値的に見ればほぼ収束している。$\gamma=0.05$ から$\gamma=8.0$ に動かすと$\overline{\Delta}_3$統計量が GOE-type に近づき、再び離れていく様子がみられる。さらに L = 30 での$\overline{\Delta}_3$とγの関係は図5（a）のようになり、Benettin らによるリアプノフ指数のγ依存曲線図5(b)を、おおよそ再現している。エネルギーレベルを無限個とった極限で、$\overline{\Delta}_3$がγの値によらず GOE-type に fit するか否かは明かではないが、仮に GOE-type に収束するとしてもその収束性に関しては差が認められる。これは系のリアプノフ指数の大小の影響と予想される。

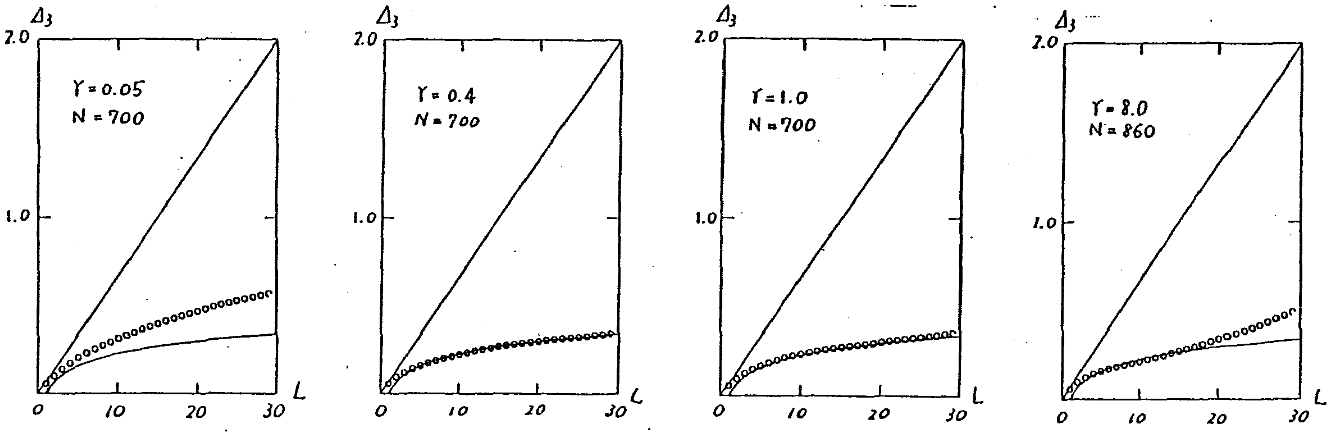
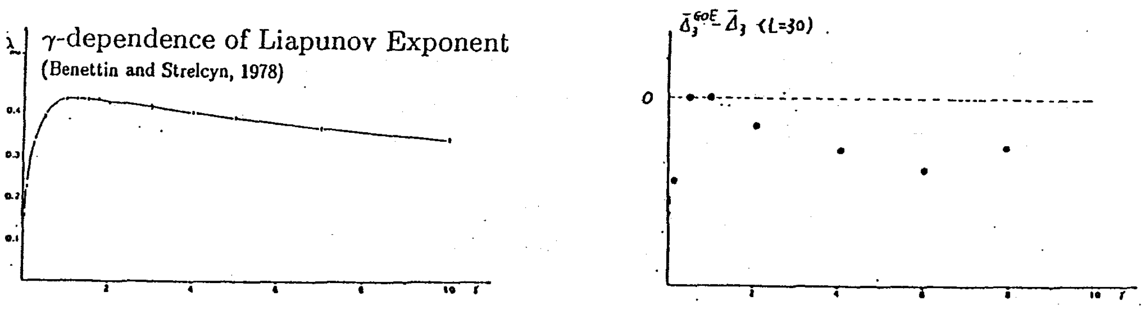


図4



（a）　図5　(b)

(ii) 多角形ビリアード系

$\alpha=\frac{2\pi}{5}$ $(g=4)$ の場合、系のリアプノフ指数が零である（即ち指数関数的不安定性という意味での古典カオスが存在しない）にも拘らず、$\overline{\Delta}_3$ 統計量は GOE-type に fit し、最近接レベル分布も Wigner-type に近い。(図6) この際、エネルギーレベルの数を変化させたときの（GOE-type への）収束性は、γの大きいスタジアムビリアード系よりもよい。よってリアプノフ指数が零でも、この系では、量子カオスの特徴的振舞いを確認できた。

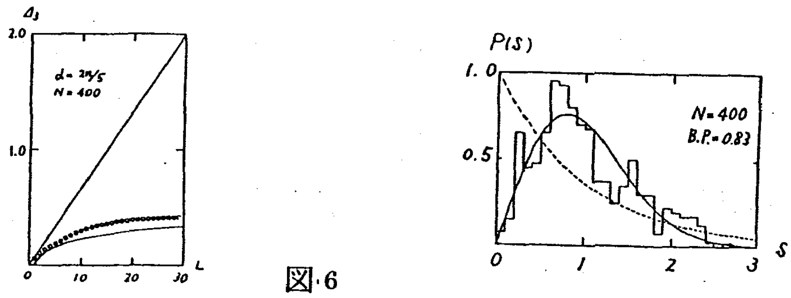


図6

§3　課題

(i)(ii) の系の軌道分離を異なるタイムスケールで考えると，無限のタイムスケール（$t \to \infty$）では (i) の方が指数関数的な軌道分離を起こすが、短いタイムスケールでは図７のごとく、角があるために (ii) の方が急激な軌道分離を起こすと考えられる。つまりタイムスケールを長くすることによって、混合性の強さが逆転する。このことが、どのようなかたちで対応する量子系にあらわれるかという視点で (i)(ii) の系をさらに調べていきたい。

ここで取り上げた多角形ビリアード系は、種数が $(1 < g < \infty)$ となるとき擬可積分系とよばれる系になる[(3)]。近年 Heller らによって指摘された periodic orbit scar[(5)]が、より可積分系に近いこの系でも見られるか？また種数の違いは量子力学にどのように影響するか？等も併せて考えていきたい。

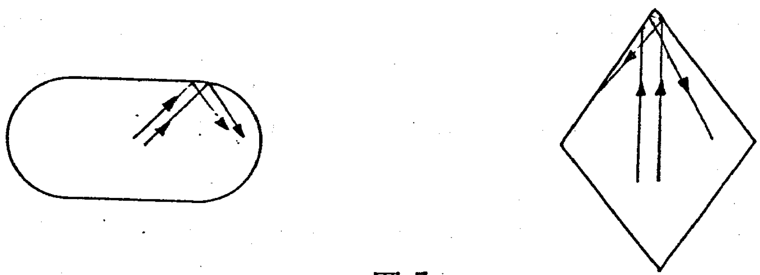


図 7

参考文献

[1] L.A.Bunimovich,Funct.Anal.Appl.8,254(1974)
　G.Benettin and J.M.Strelcyn,Phys.Rev.A17,2(1978)

[2] Ya.G.Sinai,*Introduction to Ergodic Theory*(Princeton Univ.Press)p.140

[3] P.J.Richens and M.V.Berry, Physica2D495(1981)

[4] A.Hobson, J.Math.Phys. **16**,11(1975)

[5] E.J.Heller, Phys.Rev.Lett.53,1515(1984)